Επαναληπτικά ΘΕΜΑΤΑ Τοπολογίας μετρικών χώρων

Θέμα 1

Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $d\colon C[0,1]\times C[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$d(f,g):=\int_0^1 |(f(t)-g(t))(2f(t)+3g(t))|dt,$$

ορίζει μία μετρική στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C[0,1]$.

Θέμα 2

Να δώσετε παράδειγμα μετρικού χώρου (X,d) έτσι ώστε η κλειστότητα της μπάλας $B_d(x,\varepsilon),\varepsilon>0$ να μην ισούται με την κλειστή μπάλα $\hat{B}_d(x,\varepsilon)$.

Θέμα 3

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος τέτοιος, ώστε $\forall x\in X,\ \exists\ \varepsilon_x>0$ ώστε κάθε ανοιχτή μπάλα $B_d(x,\varepsilon_x)$ να 'ναι πεπερασμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι κάθε $A\subset X$ είναι ανοιχτό.

Θέμα 4

Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon(X,d_1)\to(Y,d_2)$ μεταξύ των μετρικών (X,d_1) και (Y,d_2). Να αποδείξετε ότι το γράφημα της f είναι κλειστό υποσύνολο του $X\times Y$. Ισχύει το αντίστροφο;

Θέμα 5

Να βρείτε τα εσωτερικά σημεία, τα σημεία επαφής, τα σημεία συσσώρευσης και τα συνοριακά σημεία στα παρακάτω σύνολα.

(i) $A=\mathbb{N}$

(ii) $B=\{0\}\cup(3,4]\cup\{5\}$

(iii) $C=(0,1)\cup\mathbb{N}$

(iv) $D=(-\infty,0)\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$

Θέμα 6

(i) Δίνεται το σύνολο

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right].$$

Να εξετάσετε αν το A είναι ανοιχτό ή κλειστό σύνολο και έπειτα να βρείτε την κλειστή θήκη και το εσωτερικό του.

(ii) Να βρείτε ένα ανοιχτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ για το οποίο να ισχύει $\bar{A}=[0,1]\cup[2,3]\cup\{5\}$ και $A^o=(0,1)$. Για το σύνολο που βρήκατε να υπολογίσετε το A'. Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Κωνσταντίνος Δήμογλου Μαθηματικός

Θέμα 7

(i) Για τυχαία $x, y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $d(x,y) = |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y\,|$. Να αποδείξετε ότι η d είναι μία μετρική και μάλιστα ισοδύναμη με την ευκλείδεια μετρική. Είναι ο $(\mathbb{R}, d)$ πλήρης μετρικός χώρος;

(ii) Να αποδειχθεί ότι κάθε μετρικός χώρος είναι ομοιομορφικός προς έναν φραγμένο μετρικό χώρο.

(iii) Αποδείξτε ότι στον διακριτό μετρικό χώρο οι τελικά σταθερές ακολουθίες και οι συγκλίνουσες ακολουθίες συμπίπτουν. Έπειτα, να εξετάσετε αν η ακολουθία $x_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ είναι συγκλινουσα στον $\mathbb{R}$ ως προς τη διακριτή μετρική. Είναι η διακριτή μετρική ισοδύναμη με την ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}$;

Θέμα 8

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος, U ένα ανοιχτό υποσύνολο του X, ένα $x \in U$ και μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X τέτοια, ώστε $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $B_d(x_n, \frac{1}{n}) \subset U$.

Θέμα 9

Έστω ο συμπαγής μετρικός χώρος (X,d) και $f\colon X \to X$ μια συνάρτηση συστολής. Να δείξετε ότι:

(i) ο X είναι γραμμένος μετρικός χώρος.

(ii) $\operatorname{diam}(f^n(X)) \to 0$ (όπου, $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$).

(iii) υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) = x_0$ και $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{x_0\}$.

Θέμα 10

Έστω μη κενός συμπαγής μετρικός χώρος (X,d) και $f\colon X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία συνόλων $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής: $X_1 = X$ και $X_{n+1} = f(X_n), n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι:

(i) $X_{n+1} \subset X_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) αν $K := \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, τότε $K \neq \emptyset$.

(iii) $f(K) = K$.

Θέμα 11

Έστω ο συμπαγής μετρικός χώρος (X,p),(Y,d) και μια συνάρτηση $f\colon X \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Η f είναι συνεχής.

Κωνσταντίνος Δήμογλου Μαθηματικός

(ii) Η απεικόνιση $G_f \colon X \to X \times Y$ με $G_f(x) = (x, f(x)), x \in X$ είναι συνεχής.

(iii) Το γράφημα $Gr(f)$ της f είναι συμπαγές υποσύνολο του $X \times Y$.

(**Υπόδειξη:** Από την (i) στην (iii) αποδείξτε ότι τυχούσα υπακολουθία της $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία).
Ερώτηση: Από την (i) στην (iii) είναι απαραίτητη η υπόθεση της συμπάγειας του χώρου X;

Θέμα 12

Ας είναι δύο μετρικοί χώροι (X,p), (Y,d). Θέτουμε $Z := X \times Y$ και ορίζουμε $\sigma \colon Z \times Z \to \mathbb{R}$ με

$$\sigma((x,y),(x',y')) = p(x,x') + d(y,y').$$

(i) Να αποδείξετε ότι η σ μετρική στο Z.

(ii) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του X και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του Y, $x \in X$ και $y \in Y$, να αποδείξετε ότι $(x_n, y_n) \xrightarrow{\sigma} (x,y)$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{p} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$.

(iii) Αν (X,p), (Y,d) πλήρεις, τότε (Z,σ) πλήρης.

(iv) Αν (X,p), (Y,d) συμπαγείς, τότε (Z,σ) συμπαγής.

Θέμα 13

Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Να δοθούν παραδείγματα υποσυνόλων Α,Β,Γ,Δ της πραματικης ευθείας.

(i) Α συμπαγές και συνεκτικό.

(ii) Β συμπαγές μη συνεκτικό με $\operatorname{diam}(B) = 2, \operatorname{diam}(B^o) = 1$.

(iii) Γ μη συμπαγές και συνεκτικό.

(iv) Δ μη συμπαγές μη συνεκτικό με $\operatorname{diam}(\Delta) = 2, \operatorname{diam}(\Delta^o) = 1$.

Θέμα 14

(i) Ναα αποδείξετε ότι για κάθε A υποσύνολο τυχαίου μετρικού χώρου X, $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A})$.

(ii) Αν A είναι ένα υποσύνολο του ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ με την συνήθη μετρική, να αποδείξετε ότι το σύνολο A είναι φραγμένο αν και μόνο αν το $\bar{A}$ είναι συμπαγές.

Θέμα 15

(i) Ας είναι A, B μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα ενός συνεκτικού μετρικού χώρου (X,d). Να αποδείξετε ότι ο τύπος $f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$ ορίζει μία συνάρτηση $f \colon X \to [0,1]$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε $f(X) = [0,1]$.

(ii) Να αποδείξετε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν συνεκτικό μετρικό χώρο και με τιμές σε ένα διακριτό μετρικό χώρο είναι σταθερή.

(iii) Ας είναι τυχόν διάστημα I της πραγματικής ευθείας και μία τυχούσα συνεχής συνάρτηση $f \colon I \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το γράφημα $Gr(f)$ της f είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Κωνσταντίνος Δήμογλου Μαθηματικός

(iv) Έστω $f\colon [0,1] \to [0,1]$ μια συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Θέμα 16

Να διατυπώσετε 3 κριτήρια πληρότητας. Στη συνέχεια να εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι πλήρη.

(i) $\left(\left\{\dfrac{1}{n^2}\colon n \in \mathbb{N}\right\}, |\cdot|\right)$.

(ii) $([-1,1], |\cdot|)$.

(iii) $((0,+\infty), d_0)$, όπου d_0 η διακριτή μετρική.

(iv) $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y = x^2\}, d_2)$, όπου $d_2(\cdot,\cdot) := \sqrt{(\cdot)^2 + (\cdot)^2}$.

Θέμα 17

Να διατυπώσετε 3 κριτήρια συμπάγειας. Στη συνέχεια να εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι συμπαγή.

(i) $\left(\{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n^2}\colon n \in \mathbb{N}\right\}, |\cdot|\right)$.

(ii) $([-1,1] \cup \{2\}, |\cdot|)$.

(iii) $(\mathbb{Q}, d_0)$, όπου d_0 η διακριτή μετρική.

(iv) $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y > x^2\}, d_2)$, όπου $d_2(\cdot,\cdot) := \sqrt{(\cdot)^2 + (\cdot)^2}$.

Θέμα 18

Έστω ένας μετρικός χώρος (X,d) με την ιδιότητα ότι:

$$\forall\, x \in X : \hat{B}_d(x,1) \text{ συμπαγές} \subset X.$$

Να αποδείξετε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος (**Υπόδειξη:** Αποδείξτε ότι τυχούσα βασική ακολουθία του X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία).

Θέμα 19

Έστω X ένας μετρικός χώρος με την ιδιότητα ότι για κάθε $x, y \in X$, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f\colon [0,1] \to X$ τέτοια ώστε $f(0) = x$ και $f(1) = y$ (δηλαδή, X οδικά συνεκτικός). Να αποδείξετε ότι ο X είναι συνεκτικός. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι κάθε αστερόμορφο σύνολο A στον X είναι και οδικά συνεκτικό (άρα και συνεκτικό).

Θέμα 20

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και A ένα υποσύνολο του X. Να αποδείξετε ότι:

(i) αν A ολικά φραγμένο στον X, τότε $\bar{A}$ ολικά φραγμένο στον X. Ισχύει το αντίστροφο;

(ii) αν A συνεκτικό στον X, τότε $\bar{A}$ συνεκτικό στον X. Ισχύει το αντίστροφο;

(iii) αν A συμπαγές στον X, τότε $\bar{A}$ συμπαγές στον X. Ισχύει το αντίστροφο;

Κωνσταντίνος Δήμογλου Μαθηματικός